



TITLE:

# 根付きサイクル被覆問題に対する 近似最適解法(計算機科学の理論と その応用)

AUTHOR(S):

羽田, 明生

---

CITATION:

羽田, 明生. 根付きサイクル被覆問題に対する近似最適解法(計算機科学の理論とその応用). 数理解析研究所講究録 2007, 1554: 64-70

ISSUE DATE:

2007-05

URL:

<http://hdl.handle.net/2433/80971>

RIGHT:

## 根付きサイクル被覆問題に対する近似最適解法

羽田 明生 \*

\* 東北大学大学院情報科学研究科

**Abstract.** 本研究では、サイクル被覆問題の一種である根付きサイクル被覆問題に対する近似最適解法を提案する。最初に、この問題を 0-1 整数計画問題に定式化し、そのラグランジュ緩和問題を設定する。次いで、次数制約付き  $k$ -木問題と半割当問題を解いてこの問題の下界値を求める方法を提示する。また、上界値の決定に関しては枝の重みが三角不等式を満たす問題例に対する 2 近似アルゴリズムを提案する。最後に、それらを組み入れた近似最適解法を構築し、その有用性を数値実験で検証する。

### 1 はじめに

ある警備会社には都内に  $r$  箇所の営業所（警備員結所）があり、警備員は全部で  $k$  人いる。各営業所に配属された警備員は、警備・点検等のために、契約している  $n$  箇所の顧客を定期的に巡回している。このとき、全ての顧客の警備・点検に要する巡回時間が最小となるように、各営業所に配属する警備員数と各警備員の巡回ルートを同時に計画する問題が発生する。

同様な問題は、病院におけるナースの病室点検ルートの計画、ビル清掃会社における清掃ビル巡回ルートの計画、積載量に余裕がある場合の Multi-depot 配送計画問題、段取り時間を考慮した場合の並列機械スケジューリング問題などにおいても発生する。

上で挙げた問題は、いずれもよく知られたサイクル被覆問題に定式化される。そこで本研究では、現実問題に幅広い応用を持つサイクル被覆問題に着目し、この問題の効率的な近似最適解法を提案する。

サイクル被覆問題は、顧客の集合と各顧客間の重み、そして巡回者の集合が与えられたときに、与えられた評価関数を最適にするような、全ての顧客を含む各巡回者の巡回路を求める問題である。ただし、各巡回路はサイクルで与えられるものとする。また、サイクル被覆問題の入力に根点の集合を加えた場合の問題を、特に根付きサイクル被覆問題 (rooted cycle cover problem, RCCP) と呼ぶ。ここで根点とは、各巡回者が配置されている点のことであり、各巡回者はある 1 つの根点から出発し、その根点に戻らなければならないものとする。

サイクル被覆問題は制約条件や目的関数の種類

によっていくつか分類される。まず、以下に挙げる制約条件によってサイクル被覆問題は 3 つに分類される。

#### 1. 根点制約

各巡回者に対して根点集合がそれぞれ与えられたとき、各巡回者は対応する根点集合の要素を少なくとも 1 つは含まなければならない。

#### 2. 包含制約

各巡回者に対して境界集合がそれぞれ与えられたとき、各巡回者は対応する境界集合の全ての要素を含まなければならない。

#### 3. 重み制約

各点に重みが与えられたときに、各巡回者が訪問する点の重みの総和はある一定の範囲にななければならない。

また、目的関数に関しては、重みの総和の最小化 (最大化) を考える場合は min-sum (max-sum) 型と呼び、各巡回ルートのなかで重みが最大であるものを最小化 (重みが最小であるものを最大化) する場合は min-max (max-min) 型と呼ぶ。ここで、本研究における (RCCP) は min-sum 型で根点制約を持つサイクル被覆問題である。根点制約 (rooted) を持つ問題はさらに次のように分類される。

$$\text{rooted} \begin{cases} \text{single} \\ \text{multirooted} (R\text{-rooted}) \end{cases} \begin{cases} \text{simple} \\ \text{complex} \end{cases}$$

つまり、各巡回者の根点集合が全て等しく、その要素数が 1 である場合 (single) と複数である場

合 (multi rooted) とに分けられる。さらに, multi rooted に含まれる問題は, 根点に配置される巡回者数は 1 人以下であるとした問題 (simple) と複数でも良いとした問題 (complex) とに分けられる。このとき, 本研究における (RCCP) は complex 型に含まれる問題である。

## 2 関連研究

min-sum 型の目的関数を持ち, かつ single 型に含まれる問題に対しては, 枝の重みが三角不等式を満たすならば近似比率 2 のアルゴリズムが提案されている [7]。また, single 型で目的関数が min-max 型である問題に対しては, 枝の重みが三角不等式を満たすならば近似比率  $(6 - 4/(k+1))$  のアルゴリズムが提案されている [8]。

ある木が与えられたとき, その木に対して double 最小木法 [1] を適用することによりサイクルを得ることができる。このとき, 各枝の重みに関して三角不等式が成り立つならば, 生成されたサイクルの重みは元となった木の重みの 2 倍以下であることが保証される。よって, 与えられたグラフの点集合を, 幾つかの互いに素な木で被覆する問題 (tree cover problem, TCP) に関する研究は, (RCCP) を研究する上で非常に重要であるので, 以下 (TCP) に関する研究を紹介する。

min-sum (又は max-sum) 型の (TCP) において, 他の制約条件がない場合は最小 (最大) 全域森問題と呼ばれるが, この問題に対しては greedy algorithm で最適解が求まることが知られている [2]。また, min-sum 型の根点制約を持つ問題において, 全ての根点集合の要素数が 1 である場合も greedy algorithm で最適解を求めることができる [3]。

min-max 型で根点制約を持つ問題に対して, 全ての根点集合が等しく, その要素数が 1 であり, さらに枝の重みに対して三角不等式が成り立つならば近似比率  $(3 - 2/(k+1))$  のアルゴリズムが存在する [8]。

また, 山田らは, min-max 型で根点制約を持ち全ての根点集合の要素数が 1 である問題に対する最適解法を与えている [4]。

目的関数が min-sum 型と max-sum 型で重み制約を持ち, かつ全ての部分木に含まれる点数が等しい問題に対しては, 近似比率  $(2k-1)$ , 計算時間  $O(n^2)$  のアルゴリズムが Guttmann らによって提

案されている [5][6]。また, 彼らのアルゴリズムは, min-sum 型で全ての点の重みが等しく, 枝の重み行列が三角不等式を満たす問題に対して拡張することができ, そのアルゴリズムは近似比率  $(2k-1)$  を保証する。ただし, 計算時間は  $k$  に対して指数関数的に増大する。また, この問題に関しては, 枝の重み行列が三角不等式を満たさないならば近似比率が保証されたアルゴリズムは存在しないことが示されている [3]。

min-max 型, max-min 型である TCP は, 根点制約, 包含制約, 重み制約の何れの場合においても強 NP-困難な問題であることが示されている [3]。また, min-sum 型, max-mum 型に対しても, 包含制約と重み制約を持つ場合は強 NP-困難であることが知られている [3]。

以上のように, (RCCP) に関連した研究はいくつかあるが, 本研究で対象とするような complex 型の (RCCP) に関しては, 未だ研究がないように見受けられる。

## 3 定式化

ここでは, 本研究における (RCCP) を 0-1 整数計画問題に定式化する。

最初に, 定式化に必要な用語の説明と定義を与える。なお, 定式化においては各巡回者は少なくとも 2 つの顧客を訪問するものと仮定する。

顧客の集合を  $N = \{1, 2, \dots, n\}$ , 根点の集合を  $R = \{n+1, n+2, \dots, n+r\}$  とする。また  $V = N \cup R, E = \{(i, j) \in V \times V \mid i < j\}$  とし, 巡回者の集合を  $K = \{1, 2, \dots, k\}$  とする。加えて, 顧客  $i, j$  間の移動時間を  $w_{ij}$  とし,  $(w_{ij})$  は三角不等式を満たすものとする。さらに, 無向グラフ  $G = (V, E)$  上で変数  $x = (x_{hij}), h \in K, (i, j) \in E$  と変数  $y = (y_{hi}), h \in K, i \in V$  を次のように定める。

$$x_{hij} = \begin{cases} 1, & \text{巡回者 } h \text{ が枝 } (i, j) \text{ を移動する時} \\ 0, & \text{その他} \end{cases}$$

$$y_{hi} = \begin{cases} 1, & \text{巡回者 } h \text{ が顧客 } i \text{ を訪問する時} \\ 0, & \text{その他} \end{cases}$$

また, 以下を定義する。

**定義 1**  $G$  に次の操作を行って得られるグラフ  $\bar{G} = (\bar{V}, \bar{E})$  を  $G$  の縮約グラフという。

1. 新しい点0(擬点と呼ぶ)を追加し、擬点を各根点と同一視する。
2. 点  $i \in N$  と根点  $j \in R$  を端点とする枝  $(i, j)$  の接続替えを行う。すなわち、そのような枝  $(i, j)$  は新しい枝  $(i, 0)$  とする。
3. 全ての根点と根点に接続する全ての枝を削除する。

ここで、 $j(i) = \operatorname{argmin}_{j \in R} w_{ij}, i \in N$  とし、枝  $(i, j) \in \bar{E}$  の重み  $\bar{w}_{ij}$  を改めて

$$\bar{w}_{ij} = \begin{cases} w_{ij}, & i, j \in N, \\ w_{i, j(i)}, & i \in N, j = 0, \end{cases}$$

と定義する。さらに、 $G$  の部分グラフ  $H = (V, E(H))$  と  $\bar{G}$  の部分グラフ  $\bar{H} = (\bar{V}, \bar{E}(\bar{H}))$  に関して以下を定義する。ただし、 $E(H), \bar{E}(\bar{H})$  は  $H, \bar{H}$  の枝集合である。

**定義2**  $G$  の部分グラフ  $H$  を、次の操作で  $\bar{G}$  の部分グラフ  $\bar{H}$  に変換することを  $H$  の縮約という。

1. 点  $i \in N$  と根点  $j \in R$  を端点とする  $H$  の枝  $(i, j)$  は、 $\bar{H}$  の枝  $(i, 0)$  とする。
2. 点  $i, j \in N$  を端点とする  $H$  の枝  $(i, j)$  は、そのまま  $\bar{H}$  の枝  $(i, j)$  とする。

**定義3**  $\bar{G}$  の部分グラフ  $\bar{H}$  を、次の操作で  $G$  の部分グラフ  $H$  に変換することを、 $\bar{H}$  の拡大という。

1. 点  $i \in N$  と擬点0を端点とする  $\bar{H}$  の枝  $(i, 0)$  は、 $H$  の枝  $(i, j(i))$  とする。
2. 点  $i, j \in N$  を端点とする  $\bar{H}$  の枝  $(i, j)$  は、そのまま  $H$  の枝  $(i, j)$  とする。

$G$  のある部分グラフを縮約すると、その部分グラフに対応する  $\bar{G}$  の部分グラフが定まる。したがって、変数  $(x_{hij})$  の値が1である枝の集合と頂点集合  $V$  から構成される  $G$  の部分グラフを考えると、それを縮約した  $\bar{G}$  の部分グラフが定まる。そこで、このようにして定まる  $\bar{G}$  の部分グラフの枝集合を  $\bar{E}(x)$  とおく。つまり

$$\bar{E}(x) = \{(i, j) \in \bar{E} \mid x_{hij} = 1, h \in K, (i, j) \in E\} \cup \{(i, 0) \in \bar{E} \mid x_{hij} = 1, h \in K, i \in N, j \in R\}$$

とおく。加えて、次を定義する。

**定義4**  $\bar{G}$  の部分グラフ  $\bar{H} = (\bar{V}, \bar{E}(\bar{H}))$  は、 $|\bar{E}(\bar{H})| = |\bar{V}| - 1 + k$  であつ  $\bar{E}(\bar{H})$  が  $\bar{V}$  を張るならば、 $\bar{G}$  の  $k$ -木であるという。

**定義5**  $\bar{G}$  の  $k$ -木は擬点の次数が  $2k$  ならば、特に  $\bar{G}$  の次数制約付き  $k$ -木であるという。

このとき、

$$X = \{x \in \{0, 1\}^{|K| \times |E|} \mid \bar{E}(x) \text{ は } \bar{G} \text{ の次数制約付き } k\text{-木}\}$$

とおくと、本研究における (RCCP) は次のように定式化される。

(RCCP)

$$\min \sum_{h \in K} \sum_{(i, j) \in E} w_{ij} x_{hij} \quad (1)$$

$$\text{s.t.} \quad \sum_{h \in K} y_{hi} = 1, \quad i \in N, \quad (2)$$

$$\sum_{i \in R} y_{hi} = 1, \quad h \in K, \quad (3)$$

$$\sum_{j \in V} x_{hij} = 2y_{hi}, \quad h \in K, i \in V \quad (4)$$

$$x \in X. \quad (5)$$

$$y_{hi} \in \{0, 1\}, \quad h \in K, i \in V. \quad (6)$$

式(2)は、各顧客は唯一人の巡回者により訪問されることを、式(3)は各巡回者は唯一つの根点を含むことを、式(4)は各顧客の点に対する次数が2であることを保証する。また、式(5)は根点を含まないサイクルの除去を保証する。

## 4 下界値の決定

ラグランジュ乗数  $u_{hi}, h \in K, i \in V$  を用いて、(RCCP)における制約式(4)を目的関数に組み込むと、次のようなラグランジュ緩和問題 (LR( $u$ )) が得られる。ここで、ラグランジュ緩和法の原理より、ラグランジュ緩和問題 (LR( $u$ )) の最適値は本来の問題 (RCCP) の下界値を与える。

(LR( $u$ ))

$$\min \sum_{h \in K} \sum_{(i, j) \in E} w_{ij} x_{hij} + \sum_{h \in K} \sum_{i \in V} u_{hi} (2y_{hi} - \sum_{j \in V} x_{hij}) \quad (7)$$

$$\text{s.t.} \quad \sum_{h \in K} y_{hi} = 1, \quad i \in N, \quad (8)$$

$$\sum_{i \in R} y_{hi} = 1, \quad h \in K, \quad (9)$$

$$x \in X \quad (10)$$

$$y_{hi} \in \{0, 1\}, \quad h \in K, i \in N. \quad (11)$$

また,  $(LR(u))$  の目的関数は次のように書き換えることができる.

$$\sum_{h \in K} \sum_{(i,j) \in E} (w_{ij} - u_{hi} - u_{hj}) x_{hij} + \sum_{h \in K} \sum_{i \in V} 2y_{hi} u_{hi}$$

よって, ラグランジュ緩和問題  $(LR(u))$  は以下のような変数  $(x_{hij})$  に関する問題  $(LX(u))$  と変数  $(y_{hi})$  に関する問題  $(LY(u))$  とに分解される. ここで,  $z(LR(u)) = z(LX(u)) + z(LY(u))$  が成り立つ.

$$(LX(u))$$

$$\min \sum_{h \in K} \sum_{(i,j) \in E} (w_{ij} - u_{hi} - u_{hj}) x_{hij} \quad (12)$$

$$\text{s.t. } x \in X. \quad (13)$$

$$(LY(u))$$

$$\min 2 \sum_{h \in K} \sum_{i \in V} u_{hi} y_{hi} \quad (14)$$

$$\text{s.t. } \sum_{h \in K} y_{hi} = 1, \quad i \in N, \quad (15)$$

$$\sum_{i \in R} y_{hi} = 1, \quad h \in K, \quad (16)$$

$$y_{hi} \in \{0, 1\}, \quad h \in K, \quad i \in V. \quad (17)$$

さらに, 問題  $(LY(u))$  は以下の問題  $(LY1(u))$  と問題  $(LY2(u))$  とに分解される. また, 当然  $z(LY(u)) = z(LY1(u)) + z(LY2(u))$  が成り立つ.

$$(LY1(u))$$

$$\min 2 \sum_{h \in K} \sum_{i \in N} u_{hi} y_{hi} \quad (18)$$

$$\text{s.t. } \sum_{h \in K} y_{hi} = 1, \quad i \in N, \quad (19)$$

$$y_{hi} \in \{0, 1\}, \quad h \in K, \quad i \in N. \quad (20)$$

$$(LY2(u))$$

$$\min 2 \sum_{h \in K} \sum_{i \in R} u_{hi} y_{hi} \quad (21)$$

$$\text{s.t. } \sum_{i \in R} y_{hi} = 1, \quad h \in K, \quad (22)$$

$$y_{hi} \in \{0, 1\}, \quad h \in K, \quad i \in R. \quad (23)$$

以上より, 次数制約付き  $k$ -木問題である  $(LX(u))$  と半割当問題である問題  $(LY1(u))$ , 問題  $(LY2(u))$  の最適値を求めてそれらの和をとることにより, 本来の問題  $(RCCP)$  の下界値を得ることができる.

## 5 近似アルゴリズム

次節で示す近似最適解法においては,  $(RCCP)$  の上界値が必要である. そこでここでは,  $(RCCP)$  の上界値を決定するアルゴリズムについて述べる. ここで説明するアルゴリズムは,  $(w_{ij})$  が三角不等式を満たすとき, 近似比率 2 を達成するアルゴリズムである.

最初に次を定義する.

**定義 6**  $\bar{G}$  の部分グラフ  $\bar{H} = (\bar{V}, \bar{E}(\bar{H}))$  は,  $|\bar{E}(\bar{H})| = |\bar{V}| - 1$  であつ  $\bar{E}(\bar{H})$  が  $\bar{V}$  を張り, 擬点の次数が  $k$  ならば,  $\bar{G}$  の次数制約付き木であるという.

このとき, 部分グラフ  $\bar{H}$  の重みを  $\bar{w}(\bar{H})$ ,  $(RCCP)$  のある可能解  $C$  の目的関数値を  $z(C)$  とすると次が成り立つ.

**補題 1**  $(RCCP)$  の最適解を  $C^*$ , 重み最小である  $\bar{G}$  の次数制約付き木を  $DT^*$  とすると次が成り立つ.

$$\bar{w}(DT^*) \leq z(C^*)$$

**証明**  $C^*$  を縮約したグラフを  $\bar{C}$  とすると, 縮約の定義より  $\bar{w}(\bar{C}) \leq z(C^*)$  となる. また,  $C^*$  を構成していた各サイクルは縮約により擬点の次数が 2 であるサイクルとなるが, これら各サイクルに対して擬点に接続する枝を 1 本除去することにより得られるグラフを  $\bar{C}$  とすると当然  $\bar{w}(\bar{C}) \leq \bar{w}(\bar{C})$  が成り立つ. さらに,  $\bar{C}$  は  $\bar{G}$  を張る擬点の次数が  $k$  である 1 つの次数制約付き木であるから  $\bar{w}(DT^*) \leq \bar{w}(\bar{C})$  となる. 以上より,  $\bar{w}(DT^*) \leq z(C^*)$  が成り立つ.  $\square$

### アルゴリズム 1

step 1. 擬点の次数を  $k$  とした  $\bar{G}$  を張る次数制約付き最小木  $DT^*$  を求める.

step 2.  $\bar{E}(DT^*)$  を被覆する互いに辺素な  $DT^*$  の部分木の集合  $\hat{T} = \{\hat{T}_1, \hat{T}_2, \dots, \hat{T}_k\}$  を求める. (ただし, 各部分木において擬点を含む枝は唯 1 つ)

step 3.  $\hat{T}$  の各部分木を拡大する. 次に double 最小木法を用いて  $G$  における  $k$  個のサイクル  $\hat{C} = \{\hat{C}_1, \hat{C}_2, \dots, \hat{C}_k\}$  を定める.

補題 1 より, アルゴリズム 1 に関して次が成り立つ.

定理1 (RCCP)の最適解を  $C^*$  とすると、アルゴリズム1で求まる  $\hat{C}$  に関しては次が成り立つ。

$$z(\hat{C}) \leq 2z(C^*)$$

証明 アルゴリズム1のstep.3で求まる  $\hat{C}$  は、アルゴリズム1のstep.2で求まる  $\hat{T}$  を拡大したグラフにdouble最小木法を適用することにより得られるので  $z(\hat{C}) \leq 2\bar{w}(\hat{T})$  が成り立つ。すると、 $\bar{w}(\hat{T}) = \bar{w}(D\hat{T}^*)$  と補題1より  $z(\hat{C}) \leq 2z(C^*)$  となる。

□

## 6 近似最適解法

### 6.1 近似最適解法

ラグランジュ緩和問題の最適解を利用して、本来の問題の近似解を求める方法を一般にラグランジアンヒューリスティクス法という。そして、このラグランジアン・ヒューリスティクス法を組み入れた次のような近似最適解法が知られている。

#### 近似最適解法

- step 1. 原問題のラグランジュ緩和問題を解いて、原問題の下界値を求める。
- step 2. ラグランジュ緩和問題の最適解を利用して、原問題の近似解と近似値（上界値）を求める。
- step 3. 上界値と下界値の差（双対ギャップ）が所与の値以下ならば終了する。
- step 4. ラグランジュ乗数を一定の方法で更新して、step.1に戻る。

したがって、上記step1, step2, step4の具体的な方法を示せば、(RCCP)のラグランジアン・ヒューリスティクス法に基づく近似最適解法が構築される。そこで以下では、上記step1, step2, step4を実行する方法について順次説明する。

step1については、4節で説明したラグランジュ緩和法を用いた下界値の決定、すなわち、次数制約付き  $k$ -木問題  $(LX(u))$  と2つの半割当問題  $(LY1(u)), (LY2(u))$  を解くことにより下界値を決定する。

step2については、3節で説明したアルゴリズム1を実行し、得られた解に対して6.2で説明するローカルサーチ2-optを実行する。ただし、ラグランジアン・ヒューリスティクス法の各繰り返しで

変更されるラグランジュ乗数の値を上界値の決定に反映させるために  $G = (V, E)$  の枝の重み  $w_{ij}$  を  $\hat{w}_{ij} = \min_{h \in K} (w_{ij} - u_{hi} - u_{hj})$ ,  $(i, j) \in E$  で置き換えたグラフ  $\hat{G} = (V, E)$  上でアルゴリズム1を実行し、解を得る。ここで、上記の方法では  $\hat{G}$  において、5節で説明したアルゴリズム1を実行しているが、 $(\hat{w}_{ij})$  は三角不等式を満たすとは限らないので、得られた上界値に対して近似比率2以下であることが保証されることが限らないことに注意が必要である。

最後に、step4のラグランジュ乗数の更新に関しては劣勾配法を適用するが、これに関しては6.3で説明する。

### 6.2 ローカルサーチ

ローカルサーチとは、ある可能解が与えられたときに、その解と似た構造を持つより良質な解を探索することであり、多くの離散最適化問題に対してその有用性は広く知られている [1]。そこで、ここでの近似最適解法においてもローカルサーチを組み入れ、より良質な可能解を探索することを考える。

これまで、様々な問題に対して数多くのローカルサーチが提案されてきたが [1]、本研究で適用するローカルサーチは、巡回セールスマン問題に対する2-opt法をここでの(RCCP)に適用するために多少の変形を加えたものである。

グラフ  $G = (V, E)$ 、各顧客間（根点を含む）の重み行列  $(w_{ij})$ 、および巡回者数  $k$  が入力として与えられているものとする。また、ある可能解において、巡回者  $i$  の巡回路は  $(r_i, c_{i1}, \dots, c_{im_i}, r_i)$  で与えられているものとする。ただし、 $r_i$  は巡回者  $i$  が配置されている根点であり、各  $c_{i1}, \dots, c_{im_i}$  は巡回者  $i$  により訪問される顧客である。このとき、巡回者1の巡回路を  $(r, c_{11}, \dots, c_{1m_1}, r)$  とし、他の巡回者  $i$  の巡回路を  $(c_{i1}, \dots, c_{im_i}, r)$  として、これらの巡回路を巡回者1から順に糸状に繋げたものを、以下ではサイクルストリングと呼ぶ。例として  $k=2$ 、巡回者1,2の各巡回路をそれぞれ、 $(6, 3, 1, 4, 6)$ ,  $(7, 2, 5, 7)$  とした場合のサイクルストリングをFigure.1に挙げる。

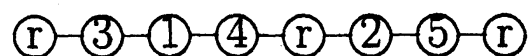


Figure.1

サイクルストリングを構成している各点に対し、左端から順に新たに  $v_1, \dots, v_{|N|+k+1}$  と記す。ここで、 $N$  は顧客の集合である。

次にサイクルストリングの重みについて考える。両端点が顧客である枝の重みは  $w_{ij}, i, j \in N$  であるとする。そして、一方の端点が顧客  $i \in N$  で他の端点が  $r$  である枝の重みは  $w_{ij^*}$  であるとする。ただし、巡回者を  $h$  とすると、 $j^* = \operatorname{argmin}_{j \in R} (w_{ch_1, j} + w_{ch_m, j})$  である。このとき、サイクルストリングを構成している全ての枝の重みの和を、そのサイクルストリングの重みとする。

サイクルストリングを与えるグラフを  $G_C = (V_C, E_C)$  とすると、(RCCP) に対する 2-opt 法は次のようになる。

### 2-opt

- step 1. 与えられた可能解からサイクルストリング  $G_C = (V_C, E_C)$  を生成する。
- step 2.  $E_C$  に含まれる異なる 2 つの枝の対を要素とする集合  $P_C$  を求める。
- step 3.  $\{(v_i, v_{i+1}), (v_j, v_{j+1})\} \in P_C$  を任意に選択する。  $P_C = \emptyset$  ならば終了。
- step 4. 枝  $(v_i, v_{i+1}), (v_j, v_{j+1})$  を  $E_C$  から除去し、新たに枝  $(v_i, v_j), (v_{i+1}, v_{j+1})$  を  $E_C$  に加える。
- step 5. 枝交換の結果、サイクルストリングの重みが減少するならば、得られたサイクルストリングの各点を左端から順に新たに  $v_1, \dots, v_{|N|+k+1}$  とし、得られたサイクルストリングを  $G_C$  として step2 に戻る。そうでなければ、 $P_C := P_C / \{(v_i, v_{i+1}), (v_j, v_{j+1})\}$  として step3 に戻る。

## 6.3 ラグランジュ乗数の更新

近似最適解法におけるラグランジュ乗数の更新には通常の劣勾配法を適用する。劣勾配法の具体的な手順については以下の通りである。ただし、繰り返し  $k$  におけるラグランジュ乗数  $u$  を  $u^k$ 、繰り返し  $k$  までの最良の上界値を  $Z_U^k$ 、繰り返し  $k$  で求まる下界値を  $Z_L^k = z(\text{LX}(u^k)) + z(\text{LY}(u^k))$  とする。

### ラグランジュ乗数の更新

- step 1. 繰り返し  $k$  における劣勾配 ( $f_{hi}^k$ ) を次式で定める。ただし、 $x_{hij}^k, y_{hi}^k$  はそれぞれ問題  $(\text{LX}(u^k), (\text{LY}(u^k)))$  の最適解である。

$$f_{hi}^k = 2y_{hi}^k - \sum_{j \in V} x_{hij}^k, h \in K, i \in V$$

- step 2. ステップレングス  $\lambda^k$  を次式で定める。ただし、 $\alpha (> 0)$  はパラメータである。

$$\lambda^k = \frac{\alpha(Z_U^k - Z_L^k)}{\sum_{h \in K} \sum_{i \in V} (f_{hi}^k)^2}$$

- step 3. 次式でラグランジュ乗数を更新する。

$$u_{hi}^{k+1} := u_{hi}^k + \lambda^k f_{hi}^k$$

## 7 数値実験

6 節で説明した近似最適解法における初期上界値は、入力グラフ上でアルゴリズム 1 を実行した結果得られた値とする。つまり、入力グラフが三角不等式を満たすならば、提案した近似最適解法を実行して得られる上界値は必ず最適値の 2 倍以内の値であるという精度保証を持つことになる。

本研究における (RCCP) を対象としたベンチマーク問題はまだ存在しないように見受けられる。そこで、三角不等式を満たす複数デポ配送計画問題のベンチマーク問題を利用して数値実験を実施した。使用した問題例は OR-Library (<http://people.brunel.ac.uk/mastjbj/jeb/info.html>) / Index of / chairedistributique / data / mdvrp から引用した。

数値実験での初期ラグランジュ乗数は、 $u_{hi}^1 = 1/k, h \in K, i \in V$  とした。また、ステップレングスのパラメータ  $\alpha$  は初期値を 2 とし、アルゴリズムの繰り返しにおいて、50 回連続して下界値が更新されない場合はそれを  $\alpha := \alpha/2$  とした。ただし、 $\alpha < 0.001$  となった場合は  $\alpha := 2$  と再調整した。

実験で使用した言語は C, OS は windows XP, CPU は Intel Pentium 4(3.40GHz, 1.00GB RAM) である。

数値実験を行った問題例のサイズを Figure.2 に挙げる。Figure.2 において、最左列に記してあるのは OR-Library における問題番号であり、 $n$  は顧客数、 $r$  は根点数、 $k$  は巡回者数である。また、Figure.3, Figure.4 において、 $Z_U$  は上界値、 $Z_L$  は下界値、 $e$

は  $(Z_U - Z_L)/Z_L$  で定義された相対誤差,  $l$  は繰返し回数,  $t$  は計算時間で単位は秒である.

Figure.3 は Figure.2 で挙げた各問題例に対する実験結果であり, 終了条件は相対誤差 10 % 以下である. また, Figure.4 は Figure.2 における問題例 p03 において, 顧客数と根点数は固定して巡回者数を変化させた問題例に対する結果である. ここで, 巡回者数  $k$  は次式で定めた.

$$k = \lceil \text{顧客数} \times \beta \rceil$$

Figure.4 における各  $k$  の値は上から順に  $\beta = 0.02, 0.04, 0.06, 0.08, 0.1$  を上式に代入して得られた値である.

## 8 おわりに

本研究では各巡回者の総移動距離の最小化を目的とした (RCCP) に対する近似最適解法を提案した. 今後は, 提案した近似最適解法の改良, 具体的

には近似アルゴリズムの近似比率の改善や, より効率的なローカルサーチの構築, さらに下界値の強化に関する研究を行う必要がある. また, 各巡回者の中の最大移動距離を最小化することを目的とした (RCCP) に対しても研究が必要であると思われる.

## 参考文献

- [1] 応用数理計画ハンドブック, 久保幹雄, 田村明久, 松井知己 (2002 年) 朝倉書店.
- [2] J.B.Kruskal, On the shortest spanning subtree of a graph and the traveling salesman problem, Proc.Amer.Math.Soc.7(1956)48-50.
- [3] Roberto Cordone and Francesco Maffioli, On the complexity of graph tree partition problems, Discrete Applied Mathematics.134(2004)51-65.
- [4] T.Yamada, H.Takahashi, S.Kataoka, A branch-and-bound algorithm for the min-max spanning forest problem, European J.Oper.Res.93(1997)93-103.
- [5] N.Guttmann-Beck, R.Hassin, Approximation algorithms for min-max tree partition, J.Algorithms 24(2)(1997)266-286.
- [6] N.Guttmann-Beck, R.Hassin, Approximation algorithms for minmax tree partition, Appl.Math.87(1-3)(1998)117-137.
- [7] M.X.Goemans and D.P.Williamson, The primal-dual method for approximation algorithms and its application to network design problems, in Approximation Algorithms for NP-hard Problems,ed.D.Hochbaum(1997)144-191.
- [8] Hiroshi Nagamochi, Approximating the Min max rooted-subtree cover problem, IE-ICE TRANS. FUNDAMENTALS (2005) vol. E88-A, No5.

	$n$	$r$	$k$
p01	50	4	4
p02	50	4	2
p03	75	5	3
p04	100	2	8
p05	100	2	5
p06	100	3	6
p07	100	4	4

Figure.2

	$Z_U$	$Z_L$	$\epsilon$	$l$	$t$
p01	451.63	411.39	0.097	1208	108.79
p02	444.89	406.00	0.095	1252	107.25
p03	570.50	521.57	0.093	1767	726.70
p04	742.43	677.59	0.095	1999	2785.70
p05	697.89	639.60	0.091	3364	4264.64
p06	686.06	623.85	0.099	4838	6125.06
p07	696.93	633.71	0.099	5237	6504.75

Figure.3

$k$	$Z_U$	$Z_L$	$\epsilon$	$l$	$t$
2	559.49	532.94	0.049	2296	907.62
3	558.33	531.92	0.049	1986	843.90
5	565.01	543.81	0.038	4542	1846.51
6	560.65	538.71	0.040	1904	811.50
8	586.99	559.28	0.049	2076	970.87

Figure.4